Ecuaţii şi sisteme diferenţiale

Teodor Stihi

December 16, 2014

Cuprins

Cap. 1

Noţiuni introductive

Cap. 2

Ecuaţii diferenţiale liniare (EDL)

Dacă în §**1.4.2** ne-am ocupat de ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul I, acum vom trece la cele de ordin superior, dar având coeficienţi constanţi sau care sunt reductibile la cele cu coeficienţi constanţi.

2.1 EDL cu coeficienţi constanţi

Vom studia pentru început acest tip de ecuaţii având ordinul al II-lea. Ele au forma generală

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

şi apar în probleme de dinamica punctului material, circuite electrice etc. Acestor edl li se pot adăuga
- *condiţii iniţiale*, cum am întâlnit în capitolul I:[1]

$$y(t_0) = y_0, \;\; y'(t_0) = y'_0, \tag{2.2}$$

- sau *condiţii la limită* (problemă bilocală) de tipul:

$$y(t_0) = y_0, \;\; y(t_1) = y_1 \;\text{ unde }\; t_0 < t_1.$$

[1]Reamintim că în acest caz avem o *problemă cu condiţii iniţiale*: PCI.

2.1.1 Cazul omogen

Acesta este cazul în care $f(t) \equiv 0$. Pentru a determina soluţia generală a edl de ordinul al II-lea omogenă

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

căutăm soluţii de forma exponenţială[2] $y(t) = e^{\lambda t}$. Introducând-o în ecuaţie găsim, prin grupare de termeni şi factorizare

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0.$$

Întrucât $e^{\lambda t} \neq 0$ trebuie ca

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{2.4}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia caracteristică* a edl de ordinul al II-lea (2.3) şi, în funcţie de semnul discriminantului său $\delta = a^2 - 4b$, distingem următoarele 3 cazuri:

I. $\delta > 0 : \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\delta}}{2}$, edl (2.3) având soluţiile particulare $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ şi soluţia generală

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \tag{2.5}$$

II. $\delta = 0 : \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$, edl (2.3) având soluţiile particulare $e^{\lambda_1 t}$, $te^{\lambda_1 t}$ şi soluţia generală

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}; \tag{2.6}$$

III. $\delta < 0 : \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{\delta}}{2}$, edl (2.3) având soluţiile particulare complexe $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$.

Comentarii. 1. Justificarea faptului că dacă $y_1(t)$ şi $y_2(t)$ verifică (2.3), atunci orice combinaţie liniară a lor $C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ o verifică, se bazează pe liniaritatea şi omogenitatea acestei e.d. şi o lăsăm ca exerciţiu.
2. Pentru o abordare adecvată a acestei proprietăţi, să considerăm operatorul diferenţial liniar de ordinul al II-lea cu coeficienţi constanţi

$$L[y(t)] = y''(t) + ay(t) + by(t). \tag{2.7}$$

[2] Reamintim că şi în cazul edl de ordinul I omogenă (1.10) soluţia avea forma exponenţială, deşi mai complicată, coeficientul funcţiei necunoscute y fiind o funcţie continuă oarecare.

Notând cu D operatorul de derivare în raport cu t: $Dy = y'(t)$ şi definind *polinomul operatorial* de gradul al II-lea

$$P(D) = D^2 + aD + b, \tag{2.8}$$

operatorul $L[y(t)]$ se poate exprima sub forma $P(D)y$, iar ecuaţia (2.3) sub forma

$$P(D)y = D^2y + aDy + by = 0. \tag{2.9}$$

Enunţăm câteva

Proprietăţi ale polinoamelor operatoriale:[3]

i. $P(D)(\alpha y + \beta z) = \alpha P(D)y + \beta P(D)z$ (liniaritatea).

ii. $P(D)e^{kt} = e^{kt}P(k)$

iii. $P(D)e^{kt}u = e^{kt}P(D+k)u$

iv. $P(D)Q(D)u = Q(D)P(D)u$,

unde $u = u(t)$, $Q(D) = D^2 + pD + q$ şi a, p, q sunt scalari.
Vom utiliza aceste proprietăţi pentru a determina soluţii ale problemelor cu condiţii iniţiale, în fiecare din cele trei cazuri menţionate anterior.

Cazul I. *Rădăcini reale şi distincte:* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Soluţia generală este în acest caz: $C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$.

Justificare. Este combinaţia liniară a două soluţii liniar independente ale edl (2.3). Verificăm: $P(D)e^{\lambda_j t} \overset{\mathbf{ii}}{=} e^{\lambda_j t}P(\lambda_j) = e^{\lambda_j t}0 = 0$ pentru $j = 1, 2$.
Liniar independenţa: dacă $C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \equiv 0$, derivăm în raport cu t:
$C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 te^{\lambda_2} \equiv 0$. Acest sistem liniar 2×2 în necunoscutele C_1, C_2 are determinantul $(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq 0$ (verificaţi!) deci o singură soluţie:$(0, 0)$.

Exemplul 1. În circuitul RLC sunt cuplaţi în serie[4]: o rezistenţă de 3 Ohmi, o bobină cu inductanţa de 1 Henri şi un condensator de 0.5 Farazi. La momentul $t = 0$ condensatorul este încărcat cu sarcina de 2 Coulombi, iar curentul în circuit este de $I(0) = 4$ Amperi. Să se determine graficul descărcării sarcinii $Q(t)$ în acest circuit.

[3] Aceste proprietăţi sunt valabile pentru polinoame operatoriale de orice grad.
[4] Vezi figura de mai jos.

R. Legea Kirchhoff a tensiunilor pentru acest circuit se exprimă, în cazul de faţă, sub forma

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0.$$

Introducând datele problemei găsim

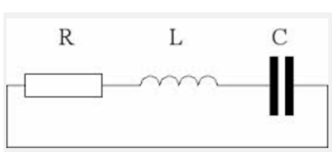
$$Q''(t) + 3Q'(t) + 2Q(t) = 0,$$

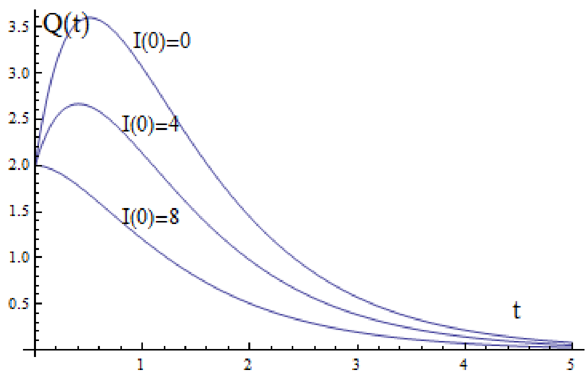
iar condiţiile iniţiale sunt $Q(0) = 2C, Q'(0) = I(0) = 4A$.
Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ cu $\delta = 1$ şi rădacinile -1 şi -2. Soluţia generală corespunzătoare acestui caz este $Q(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$. Din condiţii:

$$\begin{cases} C_1 & + & C_2 & = 2 \\ -C_1 & - & 2C_2 & = 4 \end{cases}$$

rezultă $C_1 = 8,\ C_2 = -6$, iar soluţia particulară este $Q(t) = 8e^{-t} - 6e^{-2t}$.
Pentru a face un studiu comparativ, calculăm încă două soluţii adiacente: când $I(0) = 0A$, respectiv $I(0) = 8A$. Corespunzător obţinem:

$$Q(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t} \text{ şi } Q(t) = 12e^{-t} - 10e^{-2t}.$$





Cazul II. *Rădăcini reale şi egale:* $\lambda_1 = \lambda_2$. În acest caz $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$, iar soluţia generală este: $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$.
Justificare. Verificarea edl pentru soluţii: $P(D)e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t} P(\lambda_1) \equiv 0$.
$P(D)e^{\lambda_1 t} t = (D - \lambda_1)^2 e^{\lambda_1 t} t = (D - \lambda_1) e^{\lambda_1 t} (D - \lambda_1 + \lambda_1) t =$
$e^{\lambda_1 t}(D - \lambda_1 + \lambda_1) Dt = e^{\lambda_1 t} D1 = e^{\lambda_1 t} 0 = 0$, unde am utilizat proprietatea **iii**.
Totodată, condiţia de dependenţă liniară a două funcţii $y_1(t),\ y_2(t)$ poate fi exprimată astfel $\exists \alpha \in \mathbb{R} : y_2(t) \equiv \alpha y_1(t)$.

Întrucât pentru soluţiile găsite $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ raportul este $\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)} \equiv t$ neconstant, rezultă independenţa lor liniară.

Exemplul 2. Schimbând valorile a două componente: R=4Ω şi C=0.25 F şi păstrând celelate date ale problemei precedente, găsim ecuaţia

$$Q''(t) + 4Q'(t) + 4Q(t) = 0,$$

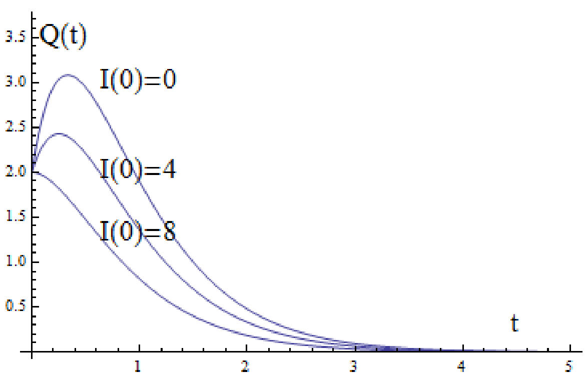
pentru care $\delta = 0$. Rădacinile vor fi egale: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, furnizând o singură soluţie $Q_1(t) = e^{-2t}$. Conform celor demonstrate, soluţia generală este

$$Q(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t} = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}.$$

Determinând soluţiile particulare corespunzătoare condiţiilor iniţiale din exemplul 1, obţinem pe rând (verificaţi!)

$$(4t + 2)e^{-2t}, \ \ (8t + 2)e^{-2t}, \ \ (12t + 2)e^{-2t}.$$

Graficele lor sunt reprezentate în figura următoare



Ce diferenţă constataţi între cele trei curbe din exemplul 1 şi cele din exemplul acesta?

Cazul III. *Rădăcini complex conjugate*: $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{4b-a^2}}{2} = -\frac{1}{2}a \pm i\omega$. Ecuaţia descrie, în acest caz, un fenomen de tip oscilatoriu exprimat matematic sub forma

$$y(t) = e^{-\frac{at}{2}}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = Ae^{-\frac{at}{2}} \sin(\omega t + \phi), \qquad (2.10)$$

unde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ este *amplitudinea maximă* a oscilaţiilor, ω este frecvenţa unghiulară, iar $\phi = Arctg(C_1/C_2)$ este *unghiul de fază.*

Dar să explicăm mai întâi cum s-a trecut de la soluţiile exponenţiale cu exponent complex $y_{1,2}(t) = exp[(-\frac{1}{2}a \pm i\omega)t]$ şi de la combinaţia lor liniară $K_1y_1(t) + K_2y_2(t)$ cu coeficienţi complecşi, la forma trigonometrică (2.10). Pentru aceasta vom face o scurtă incursiune într-un capitol de Analiză complexă dezvoltând în serie MacLaurin exponenţiala complexă e^{it}, $t \in \mathbb{R}$.[5] Astfel

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \cdots =$$

$$1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - + \cdots + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - + \ldots\right) = \cos t + i \sin t.$$

Probabil cititorul a identificat în cele două părţi - reală şi imaginară - a seriei complexe, dezvoltările în serii MacLaurin ale funcţiilor $\cos t$ şi $\sin t$.

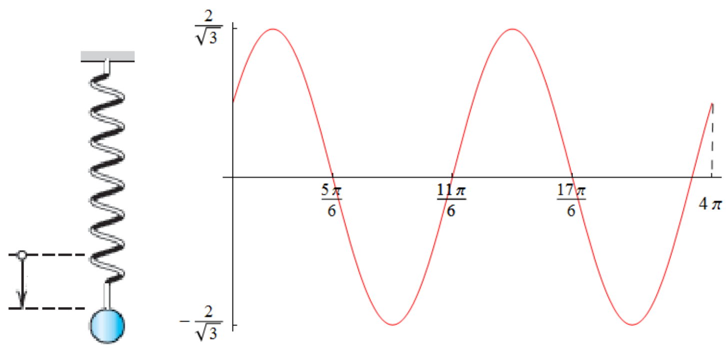
Astfel, două dintre soluţiile edl (2.3) se exprimă, în cazul de faţă, sub forma $y_{1,2}(t) = e^{-\frac{at}{2}}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$. atunci, datorită liniarităţii şi omogenităţii acestei edl, orice combinaţie liniară a lor, cu coeficienţi reali sau complecşi, este de asemenea soluţie. În particular funcţiile $\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\frac{-at}{2}}\cos\omega t$ şi $\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\frac{-at}{2}}\sin\omega t$ pe care le-am utilizat mai sus.

Pentru a stabili că (2.10) este, în acest caz, soluţia generală a edl (2.3), rămâne de arătat că cele două funcţii sunt liniar independente.

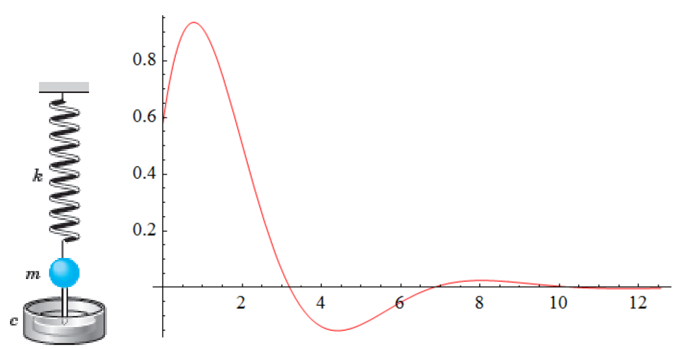
Exerciţiu. Propunem cititorului să dovedească acest fapt utilizând una - la alegere - din cele două metode anterior folosite în cazul I şi respectiv II.

Exemplul 3. Reluăm sistemul mecanic masă - resort descris în exemplul 4, §**1.1** pentru masa $m = 1kg$, constanta elastică a resortului este $k = 1N/m$, iar condiţiile iniţiale sunt $y(0) = 1/\sqrt{3}m$, $y'(0) = 1m/s$. Edl a procesului este $my''(t) = -ky(t)$ adică $y''(t) + y(t) = 0$, iar soluţia sa generală $C_1\cos t + C_2\sin t$. Din condiţiile iniţiale găsim $C_1 = 1/\sqrt{3}$, $C_2 = 1$, soluţia particulară putând fi pusă sub forma $y(t) = 2/\sqrt{3}\sin(t + \pi/6)$ (explicaţi!). Ea reprezintă oscilaţii sinusoidale de amplitudine maximă $2/\sqrt{3}$, perioadă $p = 2\pi$ şi unghi de fază $\phi = \pi/6$.

[5] Ea se obţine din dezvoltarea exponenţialei reale e^t, înlocuind t cu it, rearanjând termenii şi ţinând seama că $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ etc.



Exemplul 4. În sistemul mecanic anterior discutat vom introduce un dispozitiv de amortizare a oscilaţilor (vezi figura alăturată), ecuaţia sa diferenţială căpătând astfel forma $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$, unde $cy'(t)$ este termenul de amortizare.



Dacă $c = 1$, celelalte date rămân aceleaşi, atunci edl va fi $y''(t)+y'(t)+y(t) = 0$, cu ecuaţia caracteristică $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ şi rădăcinile $\lambda_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Soluţia generală corespunzătoare va căpăta astfel forma

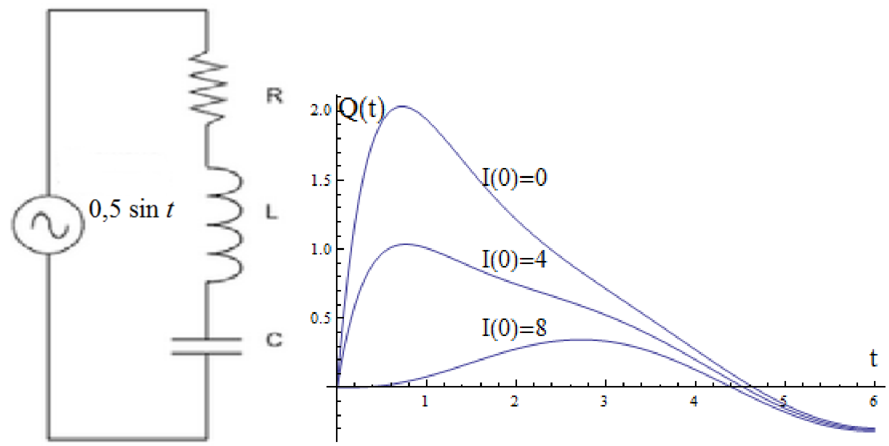
$$y(t) = C_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}t}{2},$$

iar din condiţiile iniţiale $C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $C_2 = \frac{1+2\sqrt{3}}{2}$. Graficul acestei soluţii ne arată că după două alternanţe ea se stinge aproape complet.

2.1.2 Cazul neomogen

Când din exteriorul unui sistem fizic, sistem a cărui lege de funcţionare este reprezentată printr-o edl şi omogenă, se exercită o acţiune asupra sa, această ecuaţie primeşte şi un termen liber, devenind *neomogenă*.

Exemplu. În circuitul RLC din exemplul 1 se înseriază o sursă de curent alternativ a cărui t.e.m. este dată de funcţia $E(t) = 0,5 \sin t$ V (vezi figura).



Atunci ecuaţia de funcţionare a noului sistem devine

$$Q''(t) + 3Q'(t) + 2Q(t) = 0,5 \sin t,$$

iar soluţia corespunzătoare aceloraşi condiţii iniţiale ca mai sus: $Q(0) = 2C$, $Q'(0) = 4$A, se va determina cu următoarea

Proprietate. Soluţia generală a edl neomogene $L[y(t)] = f(t)$ este *suma* dintre soluţia generală a edl omogene corespunzătoare $L[y(t)] = 0$ şi o soluţie particulară (oarecare) a edl neomogene date.

Aici soluţia generală omogenă fiind $Q_0(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$, iar cea particulară neomogenă [6] $Q_p(t) = \frac{1}{20}(\sin t - 3\cos t)$, soluţia generală va fi $Q(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} + \frac{1}{20}(\sin t - 3\cos t)$. Punând, pe rând, condiţiile iniţiale din exemplul 1, obţinem soluţiile particulare ale căror grafice au fost reprezentate în figura anterioară. Comparaţi-le cu cele reprezentate în primele două exemple.

Vom explica în cele ce urmează două metode de determinare a unei soluţii particulare pentru edl neomogenă $L[y(t)] = f(t)$. Prima dintre ele este mai simplă, angrenând doar calcul algebric. Ea se aplică în cazurile

[6] Conf. exemplului următor.

când derivatele funcţiei $f(t)$ sunt de aceeaşi formă cu ea; e.g. polinom, funcţie exponenţială, funcţiile sin şi cos, precum şi combinaţii cu acestea (conf. tabelului următor). A doua, aplicabilă oricărei funcţii $f(t)$ continue pe un interval, presupune şi calcul de integrale. Începem cu prezentare celei dintâi intitulată

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi

În cazul când funcţia $f(t)$ este de unul din tipurile descrise în tabelul următor, o soluţie particulară $y_p(t)$ de formă predeterminată, pentru edl cu coeficienţi constanţi $P(D)y = f(t)$, poate fi obţinută prin înlocuire directă în ecuaţie şi identificarea coeficienţilor pe care această formă îi presupune.

	$f(t)$	$y_p(t)$
1.	$ke^{\alpha t}$	$Ce^{\alpha t}$
2.	kt^n	$C_n t^n + C_{n-1}t^{n-1} + \cdots + C_0$
3.	$k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t$	$C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$
4.	$e^{\alpha t}(k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t)$	$e^{\alpha t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$

Exemplu. Vom determina, pe baza acestei metode, soluţia particulară $Q_p(t)$ din exemplul anterior. Funcţia $f(t) = 0,5 \sin t$ se incadrează în tabel la punctul **3.** Astfel încât vom căuta o soluţie de forma $Q_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ şi pe care o vom introduce în ecuaţia $Q''(t) + 3Q'(t) + 2Q(t) = 0,5 \sin t$.

Iată un model practic de a face această înlocuire:

$$\begin{array}{rcl} 2 \times Q_p & = & C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ 3 \times Q_p' & = & -C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ Q_p'' & = & -C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ \hline Q'' + 3Q' + 2Q & = & (C_1 + 3C_2) \cos t + (C_2 - 3C_1) \sin t \end{array}$$

Rezolvând sistemul liniar:

$C_1 + 3C_2 = 0,\ C_2 - 3C_1 = 0,5$, obţinem $C_1 = -\frac{3}{20},\ \ C_2 = \frac{1}{20}$.

Metoda variaţiei parametrilor (Lagrange)

Este o generalizare a metodei utilizate în cazul edl de ordinul I (§**1.4.2**). Ea poate fi aplicată nu numai în cazul edl cu coeficienţi constanţi, ci a tuturor edl pentru care se cunoaşte soluţia generală omogenă. O vom explica plecând de la o edl de ordinul al II-lea, fără a presupune că are coeficienţi constanţi. Fie aşadar edl[7]

$$L[y] = y'' + ay' + by = f \tag{2.11}$$

şi fie două soluţii liniar independente y_1 şi y_2 pentru edl omogenă corespunzătoare:

$$L[y_1] = L[y_2] = 0. \tag{2.12}$$

Întrucât soluţia generală omogenă este $y_0 = C_1y_1+C_2y_2$, vom arăta că există o soluţie particulară neomogenă de forma

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2. \tag{2.13}$$

Demonstraţia, ca şi în cazul edl de ordinul I, revine la determinarea celor doi coeficienţi-funcţii u_1 şi u_2. Ceea ce se face calculând $L[y_p]$. Începem cu derivatele lui y_p:

$$y_p' = u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_1y_1' + u_2y_2' \tag{2.14}$$

Observaţia ce trebuie făcută acum este că, având de determinat două funcţii necunoscute şi de satisfăcut doar o singură condiţie: verificarea edl neomogene, la alegerea lui y_p putem introduce o condiţie suplimentară. Aceasta este

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \tag{2.15}$$

Astfel calculul derivatei y_p'' se simplifică

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''. \tag{2.16}$$

Introducem în edl neomogenă (2.11) expresiile lui y_p, y_p' şi y_p'' din (2.13), (2.14) şi (2.16), grupând termenii acestei ecuaţii ce conţin u_1 respectiv u_2; se obţine

$$u_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + u_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f.$$

Observăm că parantezele reprezintă $L[y_1]$ şi $L[y_2]$, deci conf. (2.12) sunt nule. Ultima relaţie se reduce astfel la

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f. \tag{2.17}$$

[7]Întrucât coeficienţii şi necunoscuta sunt funcţii de variabila t nu mai notăm aceasta în mod explicit.

Relaţiile (2.15) şi (2.17) reprezintă un sistem algebric 2×2 în necunoscutele $u_1',\ u_2'$ şi având determinantul

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

El se numeşte *Wronskianul* celor două soluţii omogene.

Formula lui Abel pentru Wronskianul soluţiilor omogene[8] $y_1,\ y_2$ este

$$W(t) = W(t_0)exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) \tag{2.19}$$

şi ne arată că
1) dacă $W(t)$ se anulează într-un pct din domeniul de continuitate al coeficientului $a(t)$, atunci este identic nul; şi
2) dacă $W(t)$ este nenul într-un pct din domeniul de continuitate al coeficientului $a(t)$, atunci este nenul în tot acest domeniu.

Dacă $W[y_1, y_2] \equiv 0$ atunci are loc relaţia $\dfrac{y_1'}{y_1} = \dfrac{y_2'}{y_2}$, care prin integrare conduce la $y_1 = Cy_2$, C fiind o constantă (explicaţi!). Ceea ce contrazice independenţa liniară a celor două soluţii. Concluzia finală este că sistemul algebric (2.15),(2.17) este nesingular, iar formulele lui Cramer permit exprimarea derivatelor u_1' şi u_2' sub forma

$$u_1' = -\frac{y_2 f}{W},\ \ u_2' = \frac{y_1 f}{W}.$$

Prin integrarea lor rezultă

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{W} d\tau,\ \ u_2 = \int \frac{y_1 f}{W} d\tau.$$

Introducându-le apoi în (2.13) se obţine formula de calcul a soluţiei particulare neomogene

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} d\tau + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} d\tau. \tag{2.20}$$

[8] Demonstraţia o găsiţi în §**2.2.2.**

Exemplu. Să se determine soluţia generală a edl neomogene

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}.$$

R. Ecuaţia caracteristică $\lambda^2+1=0$ având rădăcinile $\lambda_{1,2}=\pm i$, soluţia generală omogenă se va reprezenta: fie printr-o combinaţie liniară cu coeficienţi complecşi $K_1e^{it}+K_2e^{-it}$, fie prin combinaţia liniară $C_1\cos t + C_2 \sin t$ cu $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (vezi §**2.1.1** cazul III). Plecând de la a doua dintre ele, vom determina soluţia particulară $y_p = u_1\cos t + u_2 \sin t$ utilizând metoda variaţiei parametrilor. Sistemul algebric (2.15),(2.17) va căpăta în acest caz forma

$$\left\{\begin{array}{rcrcc} u_1'\cos t & + & u_2'\sin t & = & 0 \\ -u_1'\sin t & + & u_2'\cos t & = & \frac{1}{\cos t} \end{array}\right.$$

Determinantul său - Wroskianul celor două soluţii omogene -fiind nenul

$$W[\cos t, \sin t] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1,$$

soluţia sa unică va fi

$$u_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \frac{1}{\cos t} & \cos t \end{vmatrix} = -\tan t, \qquad u_2' = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = 1.$$

Prin urmare $u_1 = -\int \frac{\sin t}{\cos t}dt = \ln|\cos t|$ şi $u_2 = \int dt = t$.
Astfel încât soluţia particulară neomogenă va fi $y_p = (\cos t)\ln|\cos t| + t\sin t$, iar soluţia generală $y = C_1\cos t + C_2 \sin t + y_p$.

Observaţie. Întrucât funcţia $f(t) = \frac{1}{\cos t}$ nu se încadrează în tipurile de membri drepţi menţionaţi în tabelul de mai sus, metoda coeficienţilor nedeterminaţi nu putea fi aplicată în acest caz.

Fenomenul de rezonanţă

Când membrul drept $f(t)$ reprezintă o soluţie a edl omogene, soluţia particulară neomogenă corespunzătoare y_p nu poate fi cea prescrisă in tabel. Şi aceasta pentru simplul motiv că înlocuind-o în edl ar da 0 şi nu $f(t)$!

Exemplu. Edl neomogenă $y''+y = 2\cos t$ nu poate avea soluţii de forma $C_1\cos t + C_2\sin t$, aşa cum prevede tabelul de mai sus, deoarece acestea sunt soluţii ale edl omogene corespunzătoare. În acest caz se caută soluţii particulare de forma $y_p = t(C_1\cos t + C_2 \sin t)$.

Prin derivare şi înlocuire obţinem

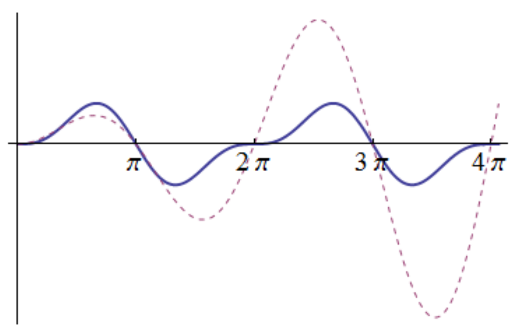
$$\begin{array}{rcl} y_p & = & t(C_1\cos t + C_2\sin t) \\ y_p' & = & C_1\cos t + C_2\sin t + t(-C_1\sin t + C_2\cos t) \\ y_p'' & = & -2C_1\sin t + 2C_2\cos t - t(C_1\cos t + C_2\sin t) \\ \hline y_p'' + y_p & = & 2C_2\cos t - 2C_1\sin t. \end{array}$$

Identificând apoi coeficienţii celor doi membri drepţi ai edl

$$2\cos t = 2C_2\cos t - 2C_1\sin t,$$

găsim $C_1 = 0,\ C_2 = 1$, adică $y_p = t\sin t$.

Pentru a înţelege semnificaţia fizică a acestei situaţii vom analiza graficele soluţiilor a două probleme cu condiţii iniţiale nule: $y(0) = 0, y'(0) = 0$, pentru edl $y'' + y = 3\sin 2t$ şi $y'' + y = 2\cos t$. [9] Soluţia celei dintâi este diferenţa a două sinusoide $2\sin t - \sin 2t$ - funcţie mărginită şi periodică cu perioada 2π şi care reprezintă oscilaţiile periodice ale sistemului masă - resort fără amortizare.



Soluţia celei dintâi este diferenţa a două sinusoide $2\sin t - \sin 2t$ - funcţie mărginită şi periodică cu perioada 2π şi care reprezintă oscilaţiile periodice ale sistemului masă - resort fără amortizare.

Soluţia celei de a doua ecuaţii este $t\sin t$ (grafic cu linie întreruptă) - funcţie nemărginită şi neperiodică. Fenomenul acesta de creştere a amplitudinii oscilaţiilor se datorează coincidenţei dintre frecvenţa unghiulară proprie a sistemului $\omega = 1$ (vezi §**2.1.1** cazul III) şi cea a termenului liber $2\cos t$. El poartă numele de *rezonanţă.*

Principiul suprapunerii (sau superpoziţiei)

Vom enunţa un principiu general ce guvernează nu numai toate edl, ci şi sistemele diferenţiale liniare precum şi alte tipuri de ecuaţii liniare. Aici pentru cazul particular al edl $P(D)y = f(t)$.

[9] Pentru semnificaţia fizică a edl omogene corespunzătoare vezi exemplul 3 din §**2.1.1.**.

Dacă $f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)$ şi dacă $P(D)y_{p_j} = f_j(t),\ j = 1, \dots, n$, atunci $y_p = \sum_{j=1}^{n} y_{p_j}$ este soluţie (particulară) pentru $P(D)y = f(t)$.

Spre exemplu, dacă membrul drept al edl $P(D)y = f(t)$ este suma a două funcţii $f(t) = f_1(t)+f_2(t)$ şi dacă y_{p_1} şi y_{p_2} sunt soluţii particulare pentru cele două edl: $P(D)y_{p_1} = f_1(t)$, respectiv $P(D)y_{p_2} = f_2(t)$, atunci $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ este soluţie (particulară) pentru $P(D)y = f_1(t) + f_2(t)$.

Exemplu. Membrul drept al edl $y''+y = \dfrac{2 + \cos 2t}{\cos t}$ se poate descompune astfel: $2\cos t + \dfrac{1}{\cos t}$. Întrucât, aşa cum am văzut, în cele două exemple anterioare, edl $y'' + y = 2\cos t$ are soluţia particulară $t \sin t$, iar edl $y'' + y = \dfrac{1}{\cos t}$: soluţia particulară $(\cos t) \ln |\cos t| + t \sin t$.

Aşadar, conform principiului superpoziţiei, edl dată va avea soluţia particulară $y_p = (\cos t) \ln |\cos t| + 2t \sin t$.

Observaţie. $(\cos t) \ln |\cos t| + t \sin t$ nu este soluţie pentru edl din exemplu, aşa cum uşor se poate vedea.

2.2 EDL cu coeficienţi variabili

2.2.1 EDL Euler-Cauchy

Edl de ordinul al II-lea de acest tip, în variabila x şi funcţia necunoscută $y(x)$, au forma generală

$$L[y(x)] = x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = f(x) \text{ unde } a, b \in \mathbb{R} \text{ şi } x \neq 0. \quad (2.21)$$

Printre edl cu coeficienţi variabili, acesta este singurul tip ce poate fi rezolvat cu metode generale, întrucât este reductibil la cel cu coeficienţi constanţi. Reducerea se realizează prin schimbarea de variabilă $x = e^t$ dacă $x > 0$ sau $x = -e^t$ dacă $x < 0$. Să determinăm relaţia dintre cei doi operatori de derivare, $\dfrac{d}{dx}$ şi $D = \dfrac{d}{dt}$, ce decurge din schimbarea menţionată.
Notăm $z(t) = y(e^t)$ şi rezultă $Dz = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dx}e^t \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^{-t}Dz$.

Apoi $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t}D(e^{-t}Dz) = e^{-2t}(D^2 - D)z = e^{-2t}D(D-1)z.$ [10]

Ecuaţia (2.21) se va transforma astfel în

$$D(D-1)z + aDz + bz = f(e^t) \tag{2.22}$$

sau, notând cu $\mathcal{P}(D) = D(D-1) + aD + b = D^2 + (a-1)D + b$ polinomul operatorial ataşat edl Euler - Cauchy, sub forma $\mathcal{P}(D)z = f(e^t)$.

Exemplu. Să se determine soluţia p.c.i. ataşată edl E.C.

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 2\cos\ln x \ \ (x > 0), \text{ unde } \ y(1) = y'(1) = 0.$$

R. Prin schimbarea de variabilă $x = e^t$ edl devine $(D^2+1)z = 2\cos t$, iar condiţiile iniţiale corespunzătoare vor fi $z(0) = Dz(0) = 0$.
Aşa cum am arătat în exemplul anterior, din §**2.1.2**, soluţia acestei p.c.i. este $t\sin t$. Prin schimbarea de variabilă $t = \ln x$, inversa celei operate iniţial, obţinem soluţia p.c.i pentru edl E.C.

$$y(x) = \ln x \cos\ln x \ \ (x > 0).$$

Observaţie. Aşa cum am constatat, operatorul diferenţial liniar Euler-Cauchy $L[y(x)]$ (2.21) se transformă, prin schimbarea de variabilă $x = e^t$, într-un operator diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi $P(D)z(t)$. Întrucât soluţiile edl şi omogene $P(D)z = 0$ [11] sunt de forma $z = e^{\lambda t}$, deducem că soluţiile edl şi omogene E.C. $L[y(x)] = 0$ sunt de forma $y(x) = e^{\lambda \ln x} = x^\lambda$, unde $x > 0$. Înlocuind în ecuaţie găsim

$$L[x^\lambda] = [\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b]x^\lambda.$$

Ceea ce ne conduce la polinomul caracteristic $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 + (a-1)\lambda + b$ al edl E.C. omogene.

---

[10] Această regulă de derivare se poate generaliza astfel: $\frac{d^ky}{dx^k} = e^{-kt}D(D-1)\dots(D-k+1)$.

[11] Mulţimea lor alcătuieşte *nucleul* acestui operator liniar (cf. Algebra Liniară.)

2.2.2 EDL de ordinul al II-lea generală

O astfel de ecuaţie are forma

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x), \tag{2.23}$$

unde funcţiile $a(x)$, $b(x)$ şi $f(x)$ sunt definite în intervalul $I \subset \mathbb{R}$.

Definiţie. O soluţie a acestei edl este o funcţie $y = \phi(x)$ definită şi având derivate continui de ordinele I şi II în I, care înlocuită, împreună cu derivatele sale în ecuaţia (2.23), conduc la o identitate în I.

Acestei e.d. i se ataşează, de obicei, condiţiile iniţiale

$$y(x_0) = y_0, \text{ şi } y'(x_0) = y'_0 \tag{2.24}$$

unde $x_0 \in I$, iar $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$.

Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei p.c.i. (2.23),(2.24).

1. Dacă funcţiile $a(x)$, $b(x)$ şi $f(x)$ sunt definite şi continui în intervalul $I \subset \mathbb{R}$, atunci există o soluţie $y = \phi(x)$ în intervalul I şi care verifică condiţiile (2.24) în $x_0 \in I$.

2.Funcţia $\phi(x)$ este unica soluţie pentru (2.23) şi (2.24) pe intervalul I.

Fără demonstraţie.

EDL de ordinul al II-lea omogenă

Considerăm operatorul diferenţial liniar de ordinul al II-lea cu coeficienţi variabili

$$L[y] = y'' + a(x)y' + b(x)y \tag{2.25}$$

unde $a(x)$ şi $b(x)$ sunt funcţii continui în I.

Proprietatea 1. Mulţimea $\mathcal{S}_2$ a tuturor soluţiilor edl omogene $L[y] = 0$ este un spaţiu vectorial real cu dimensiunea 2.

Demonstraţie. În primul rând, conform condiţiilor din definiţia noţiunii de soluţie $\mathcal{S}_2$ este o submulţime a spaţiului vectorial real al tuturor funcţiilor de clasă $\mathbf{C}^2_I(\mathbb{R})$.

Exerciţiu. Arătaţi că $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \forall \phi, \psi \in \mathcal{S}_2 : \alpha\phi + \beta\psi \in \mathcal{S}_2$.

Vom arăta că există o bază a lui $\mathcal{S}_2$ alcătuită din două soluţii liniar independente ale edl omogene $L[y] = 0$. Aceste soluţii, le notăm $\phi(x)$ şi $\psi(x)$, sunt cele care satisfac condiţiile iniţiale $\phi(x_0) = 1,\ \phi'(x_0) = 0$ şi respectiv $\psi(x_0) = 0,\ \psi'(x_0) = 1$, iar existenţa lor se bazează pe teorema anterioară.

Liniar independenţa. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha\phi(x) + \beta\psi(x) \equiv 0$. Derivând obţinem $\alpha\phi'(x) + \beta\psi'(x) \equiv 0$. şi pentru $x = x_0$, din cele două identităţi rezultă: $\alpha = 0,\ \beta = 0$.

Sistem de generatori. Să arătăm că generează spaţiul $\mathcal{S}_2$. Pentru aceasta vom considera o soluţie oarecare $\chi \in \mathcal{S}_2$, urmând a determina coeficienţii α şi β astfel încât: $\forall x \in I : \chi(x) = \alpha\phi(x) + \beta\psi(x)$.

Alegem $\alpha = \chi(x_0)$ şi $\beta = \chi'(x_0)$. Funcţia $\chi_1(x) = \chi(x_0)\phi(x) + \chi'(x_0)\psi(x)$ fiind combinaţie liniară a două soluţii, este deasemenea soluţie şi verifică relaţiile

$$\chi_1(x_0) = \chi(x_0)\phi(x_0) + \chi'(x_0)\psi(x_0) = \chi(x_0),$$

$$\chi_1'(x_0) = \chi'(x_0)\phi'(x_0) + \chi(x_0)\psi'(x_0) = \chi'(x_0).$$

Explicaţi! Atunci, conf. proprietăţii de unicitate (vezi teorema pctul 2), rezultă că $\chi \equiv \chi_1$. $\triangle$

Aşadar pentru a determina soluţia generală a edl omogene

$$L[y] = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad (2.26)$$

trebuie să determinăm două soluţii liniar independente $\phi_1(x)$ şi $\phi_2(x)$ ale sale. În cele ce urmează vom vedea că plecând de la o astfel de soluţie neidentic nulă a ei se poate ajunge la soluţia generală. Pentru moment însă revenim la un instrument util de lucru: determinantul wronskian $W[y_1, y_2]$ a două soluţii pentru (2.26).[12]

Reamintim că dacă $L[y_1] = L[y_2] = 0$ atunci

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

verifică formula lui Abel

$$W(x) = W(x_0) exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right).$$

[12] A se vedea Metoda variaţiei parametrilor în §2.1.2.

Demonstraţie.

$$\frac{dW}{dx} = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 =$$

şi utilizând edl (2.26)

$$= y_1(-a(x)y_2' - y_2) - y_2(-a(x)y_1' - y_1) = -a(x)W.$$

Soluţia acestei e.d. separabile este $W(x) = Cexp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right)$. Pentru $x = x_0$ rezultă $C = W(x_0)$.△

Problemă. Cunoscând o soluţie (nenulă) y_1 pentru edl omogenă (2.26), cum putem determina o a doua soluţie liniar independentă de ea?
R. Utilizând formula de mai sus şi notând y soluţia căutată putem scrie că

$$y_1 y' - y_1' y = exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right) \tag{2.27}$$

unde x_0 are o valoare aleasă convenabil.

Exemplu. $x^2y'' + y' - 2y = 0$, cu soluţia particulară $y_1 = 2x^2 + 2x + 1$.
R. Aici $a(x) = \frac{1}{x^2}$, iar formula lui Abel poate fi scrisă astfel

$$W[y_1, y] = (2x^2+2x+1)y' - (4x+2)y = exp\left(-\int_1^x 1/\tau^2 d\tau\right) = exp\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Soluţia generală a acestei edl de ordinul I este $C(2x^2+2x+1)+x^2exp\left(\frac{1}{x}-1\right)$. Astfel alegând soluţia particulară pentru $C = 0$, obţinem pentru edl dată soluţia $y_2 = x^2exp\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ şi soluţia generală[13]

$$C_1(2x^2 + 2x + 1) + C_2x^2exp\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

[13]Echivalentă cu $C_1(2x^2 + 2x + 1) + C_2x^2exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

EDL de ordinul al II-lea neomogenă

Aplicând, ca şi în cazul celorlalte edl discutate până acum, metoda variaţiei parametrilor şi cunoscând soluţia generală omogenă corespunzătoare

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

căutăm o soluţie particulară neomogenă de forma

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2.$$

Aşa cum am văzut în §2.1.2, derivatele celor două funcţii necunoscute u_1 şi u_2, aici funcţii de x, se obţin din relaţiile

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0,$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f,$$

prin formulele

$$u_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \quad u_2' = \frac{y_1 f}{W},$$

unde $W = W[y_1, y_2]$ este wronskianul celor două soluţii omogene.

Exemplu. Cunoscând soluţia generală omogenă $y = C_1 + C_2 \ln x$ corespunzătoare edl $y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{1}{x^2} (x > 0)$, să se determine soluţia ei generală.

R. Din sistemul algebric

$$\begin{cases} u_1' + u_2' \ln x = 0 \\ \frac{1}{x} u_2' = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

obţinem $u_2' = \frac{1}{x}$, apoi $u_1' = -\frac{\ln x}{x}$ şi prin integrare $u_1 = -\frac{\ln^2 x}{2}$, $u_2 = \ln x$. Soluţia particulară neomogenă va fi $y_p = -\frac{\ln^2 x}{2} + \ln^2 x = \frac{\ln^2 x}{2}$, iar cea generală $y = C_1 + C_2 \ln x + \frac{\ln^2 x}{2}$.

2.3 EDL de ordin superior

Dacă până aici am lucrat numai cu edl de ordinul al II-lea, tip frecvent întâlnit în aplicaţii, acum vom trata şi edl cu ordin mai înalt. Vom constata astfel cum se aplică acestor cazuri, metodele expuse anterior. Menţionăm şi faptul că astfel de situaţii apar, de obicei, prin reducerea sistemelor diferenţiale liniare la o singură edl.[14] Forma generală a unei edl omogene de ordinul n în funcţia necunoscută $y(x)$ este

$$L[y(x)] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \tag{2.28}$$

unde coeficienţii a_k şi $f(x)$ sunt funcţii de x definite şi continui într-un interval I al dreptei reale.

Problema cu condiţii iniţiale ataşată ecuaţiei (2.28) constă în determinarea soluţiei $y(x)$ care să verifice următoarele n *relaţii:*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{2.29}$$

unde $x_0 \in I$, iar $y_0,\ y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ sunt numere reale. Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei p.c.i. enunţată în §2.2.2 este valabilă şi cu referire la ecuaţia (2.28) şi condiţiile (2.29).

2.3.1 Cazul omogen

Acesta este cazul în care $f(x) = 0$.
Vom discuta doar ecuaţiile cu coeficienţi constanţi şi cele reductibile la acestea, i.e. ecuaţiile Euler-Cauchy. Astfel, dacă toţi coeficienţii a_k sunt numere (reale), ecuaţia caracteristică (2.4) devine

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2.30}$$

Notând $P(\lambda)$ polinomul din membrul stâng al acestei ecuaţii, conform *teoremei fundamentale a algebrei* el se descompune într-un produs de factori de gradul I, respectiv de gradul al II-lea, factori cu coeficienţi reali, ce pot apare ridicaţi la diverse puteri:[15]

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_m)^{m_q}(\lambda^2+s_1\lambda+p_1)^{n_1}\ldots(\lambda^2+s_r\lambda+p_r)^{n_r},$$

unde $m_1 + \cdots + m_q + 2n_1 + \cdots + 2n_r = n$.
Fiecărui factor $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ îi corespund, în soluţia generală, m_i soluţii liniar independente:

[14] A se vedea §3.1.4, exemplul 2.

[15] Factorii de gradul I: $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ corespund rădăcinilor reale cu multiplicitatea m_i, iar cei de gradul al II-lea la puterea n_i - câte unei perechi de rădăcini complex conjugate, ambele cu multiplicitatea n_i.

$y_j = x^j e^{\lambda_i x}, j = 0, 1, \ldots, m_i - 1.$
Similar, fiecărui factor $(\lambda^2 + s_k\lambda + p_k)^{n_k}$ îi corespund, în soluţia generală, $2n_k$ soluţii liniar independente:
$y_j = x^j e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, \qquad z_j = x^j e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_k - 1,$
unde $\alpha_k \pm i\beta_k$ sunt rădăcinile complex conjugate ale trinomului $\lambda^2 + s_k\lambda + p_k$.

Exemple. 1. Să se determine soluţia p.c.i. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$, cu $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1$.
R. $P(\lambda) = (\lambda - 2)^3$, deci soluţia generală va fi $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x}$.
Din condiţiile iniţiale deducem:
$y(0) = C_1 = 1, y'(0) = 2 + C_2 = 0, C_2 = -2\ y''(0) = 4 - 8 + 2C_3 = -1,$
deci $C_3 = \frac{3}{2}$. Astfel încât: $y = \dfrac{1}{2}e^{2x}(3x^2 - 4x + 2)$.

2. Să se determine soluţia p.c.i. $y''' - 3y'' + y' - 3y = 0$, cu $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1$.
R. $P(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$, iar soluţia generală: $C_1e^{3x} + C_2\cos x + C_3\sin x$.
Condiţiile iniţiale dau sistemul $C_1 + C_2 = 0,\ 3C_1 + C_3 = 0,\ 9C_1 - C_2 = -1$, au soluţia $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0$. Adică $y(x) = \cos x$.

3. Soluţia p.c.i. $y^{iv} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$ cu $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 1, y'''(0) = -1$.
R. $P(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2$ corespunde unei la soluţii generale de forma

$$y(x) = e^{-x}[(C_1x + C_2)\cos x + (C_3x + C_4)\sin x].$$

Punând condiţiile iniţiale obţinem sistemul
$C_2 = 1,\ C_1 - C_2 + C_4 = -1,\ -2C_1 + 2C_2 - 2C_4 = 1,\ 2C_2 - 6C_3 + 2C_4 = -1$ cu soluţia $C_1 = 0,\ C_2 = 1,\ C_3 = 1/2,\ C_4 = 0$. Astfel, soluţia căutată va fi $\dfrac{1}{2}e^{-x}(2\cos x + x\sin x)$.

2.3.2 Cazul neomogen

Când $f(x) \not\equiv 0$ soluţia generală a edl $L[y(x)] = f(x)$ se compune, cum am văzut în §2.1.2, din soluţia generală omogenă la care se adaugă o soluţie particulară neomogenă. Aceasta din urmă depinde atât de soluţia omogenă, cât şi de $f(x)$. Cât priveşte metodele de determinare a unei astfel de soluţii particulare, ele depind de termenul liber $f(x)$ şi sunt cele explicate în §2.1.2.

Cap. 3

Sisteme diferenţiale liniare (SDL)

3.1 SDL cu coeficienţi constanţi

3.1.1 Forma normală a unui SDL

Un sistem diferenţial liniar având n ecuaţii şi n funcţii necunoscute $x_1(t), \dots, x_n(t)$ are următoarea *formă normală*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \dot{x}_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{array} . \tag{3.1}$$

unde $\dot{x}_j$ reprezintă derivatele $\dfrac{dx_i}{dt}$, iar a_{ij} şi b_i sunt funcţii de t.

Observaţie.În cazul coeficienţilor constanţi, de care ne vom ocupa mai jos, a_{ij} sunt constante reale, iar $b_i = b_i(t)$ funcţii reale.

Definiţie. O soluţie a problemei (3.1) cu condiţiile iniţiale:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \quad \text{unde} \;\; t_0 \in I \;\; \text{şi} \;\; x_1^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

este un vector de funcţii $x_1(t), \dots, x_n(t)$ definite şi derivabile în intervalul I, funcţii care înlocuite, împreună cu derivatele lor, în relaţiile (3.1) conduc la tot atâtea identităţi şi care verifică relaţiile (3.2).

Teoremă de existenţă şi unicitate.
Vom presupune că atât coeficienţii $a_{ij}(t)$ cât şi funcţiile $b_i(t)$ sunt *continue* şi *mărginite* în intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Atunci există şi sunt unice funcţiile $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ definite în itervalul I şi care verifică relaţiile (3.1) şi (3.2).
Fără demonstraţie.

Relaţiile (3.1) şi (3.2) pot fi scrise mai compact în

Notaţia vectorială. Astfel dacă $A(t) = [a_{ij}(t)]$ este matricea $n \times n$ de funcţii-coeficienţi şi $b(t) = [b_1(t) \cdots_n (t)]^T$ vectorul coloană de funcţii-termeni liberi, iar $x(t) = [x_1(t) \ldots x_n(t)]^T$, $\dot{x}(t) = [\dot{x}_1 \ldots \dot{x}_n]^T$, vectorii-coloană de funcţii necunoscute şi respectiv derivatele lor, atunci (3.1) şi (3.2) vor deveni

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{3.3}$$

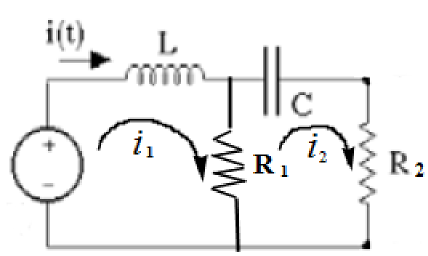
respectiv

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.4}$$

unde $x_0 = [x_1^0 \ldots x_n^0]^T \in \mathbb{R}^n$.

Reducerea la forma normală. SDL reprezintă legi matematice ale unor sisteme fizice sau de altă natură şi de aceea nu apar întotdeauna sub această formă specială. Metodele de rezolvare a lor necesită, precum vom vedea, reprezentarea în forma normală. Transformarea se poate realiza prin prelucrări algebrice ale ecuaţiilor şi/sau prin schimbări de funcţii necunoscute. Iată două exemple:

Exemplul 1. În circuitul următor[1] sursa de curent continuu are tensiunea E=12V,



[1]Vezi şi §**1.4.2**, exemplul 1.

inductanţa bobinei este L=1Henry,condensatorul are capacitatea C=0,25Farazi, iar rezistenţele au R1=4Ω, R2=6Ω. Aplicând legea tensiunilor în fiecare din cele două ochiuri de reţea prin care trec curenţii $i_1(t)$ şi $i_2(t)$, obţinem ecuaţiile:

$$Li_1'(t)+R_1(i_1(t)-i_2(t))=E, \quad R_2i_2(t)+R_1(i_2(t)-i_1(t))+\frac{1}{C}\int i_2(t)dt=0.$$

Presupunând că la momentul $t=0$ prin circuit nu trece curent, să se determine $i_1(t)$ şi $i_2(t)$ la momentul $t>0$.

După cum se observă, a doua ecuaţie este integrală, nu diferenţială. Prin derivare ea devine $R_2i_2'(t)+R_1(i_2'(t)-i_1'(t))+\frac{1}{C}i_2(t)=0$. Înlocuim acum valorile pieselor componente în cele două edl şi obţinem SDL următor:

$$i_1'(t)+4(i_1'(t)-i_2'(t))=12, \quad 6i_2'(t)+4(i_2'(t)-i_1'(t))+4i_2(t)=0.$$

Pentru a-l aduce la forma normală el trebuie rezolvat (algebric) în funcţie de necunoscutele $i_1'(t)$ şi $i_2'(t)$; ceea ce conduce la

$$\begin{array}{rcl} i_1'(t) & = & -4i_1(t)+4i_2(t)+12 \\ i_2'(t) & = & -1,6i_1(t)+1,6i_2(t)+4,8. \end{array} \tag{3.5}$$

Acestui SDL i se adaugă, conform problemei, condiţiile iniţiale

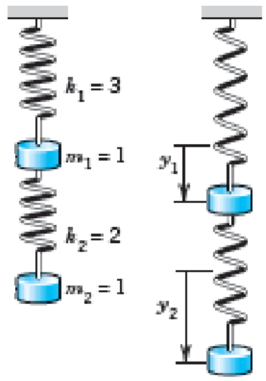
$$i_1(0)=i_2(0)=0. \tag{3.6}$$

În reprezentarea matriceală (3.3), (3.4) aceste relaţii devin

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1,6 & 1,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4,8 \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Exemplul 2. În figura de mai jos sunt reprezentate două poziţii ale unui sistem de mase şi resorturi. Prima este cea de repaos, iar a doua în mişcare. Deplasările se fac pe verticală şi în sens descendent. Corespunzător celor două mase $m_1=1$ şi $m_2=1$, ele sunt notate y_1, respectiv y_2.



Aplicând legea a doua a dinamicii şi pe cea a lui Hooke[2], resorturile având constantele elastice $k_1 = 3$, respectiv $k_2 = 2$, obţinem ecuaţiile de mişare

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -3y_1 + 2(y_2 - y_1) &= -5y_1 + 2y_2 \\ \ddot{y}_2 &= -2(y_2 - y_1) &= 2y_1 - 2y_2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lor le ataşăm condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} y_1(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) &= -2\sqrt{6} \\ y_2(0) = 2, \quad \dot{y}_2(0) &= \sqrt{6}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pentru a aduce această problemă cu condiţii iniţiale la forma sa normală vom introduce noi variabile astfel

$$x_1 = y_1, \; x_2 = \dot{y}_1, \; x_3 = y_2, \; x_4 = \dot{y}_2. \tag{3.11}$$

Noul SDL poate fi astfel reprezentat matriceal sub forma $\dot{x} = Ax$ unde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

iar condiţia iniţială corespunzătoare este

$$x(0) = [1 \quad -2\sqrt{6} \quad 2 \quad \sqrt{6}]^T. \tag{3.13}$$

3.1.2 Soluţia SDL omogen cu coeficienţi constanţi.

Pentru a obţine soluţia unui astfel de sistem diferenţial, vom apela la noţiunea de matrice exponenţială e^{At} a unei matrice $A_{n\times n}$ de numere.

Matricea exponenţială e^{At}; proprietăţi.

Această noţiune a fost introdusă în cap.6, §**6.4** din Algebra Liniară. O reluăm pentru mai multă claritate.

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $t \in \mathbb{R}$ seria de puteri de matrice

$$I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \ldots \tag{3.14}$$

[2]Vezi şi §**1.1.** pctul **7**

este absolut şi uniform convergentă pentru orice $t \in \mathbb{R}, |t| \leq a$. [3] Ea defineşte funcţia de t:

$$e^{At} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

funcţie derivabilă, termen cu termen, în raport cu t; anume

$$\frac{d}{dt}e^{At} = 0 + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}2A^2t + \frac{1}{3!}3A^3t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}nA^nt^{n-1} + \cdots =$$
$$A\left(I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} + \dots\right) = Ae^{At}.$$

Ceea ce conduce la formula

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}. \tag{3.15}$$

Observaţii. **1.** Similar se poate deduce şi formula $\frac{d}{dt}e^{At} = e^{At}A$, de unde rezultă relaţia

$$Ae^{At} = e^{At}A. \tag{3.16}$$

2. Formula binomului lui Newton poate fi exprimată sub forma compactă următoare:[4] $(a+b)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{a^jb^k}{j!k!}$. Demonstraţia, bazată pe inducţie, utilizează comutativitatea produsului numerelor. Ea nu poate fi extinsă aşadar la matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ decât în cazul când ele comută.

Proprietate. Dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comută, i.e. $AB = BA$, atunci

$$\forall t \in \mathbb{R} : e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}. \tag{3.17}$$

Demonstraţie. Întrucât, conform celor de mai sus, are loc pentru orice n relaţia

$$(A+B)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{(At)^j(Bt)^k}{j!k!},$$

prin trecere la limită (pentru $n \to \infty$) obţinem următoarele egalităţi

$$e^{(A+B)t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{(At)^j(Bt)^k}{j!k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(At)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Bt)^k}{k!} = e^{At}e^{Bt}.\triangle$$

---

[3]În norma $||A||$ ce se poate defini considerând matricea A ca un vector din $\mathbb{R}^{n\times n}$. Vezi A.L. cap.5.

[4]Verificaţi pentru $n = 2$ şi $n = 3$.

Consecinţă. Dacă $AB = BA$ atunci $\forall t \in \mathbb{R} : e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$.

Teoremă de existenţă şi unicitate. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ şi $t_0 \in \mathbb{R}$ sunt fixaţi, atunci problema cu condiţie iniţială

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \;\; x(0) = x_0 \tag{3.18}$$

pentru sistemul diferenţial şi omogen, are soluţia unică

$$x(t) = e^{At}x_0. \tag{3.19}$$

Demonstraţie. **Existenţa.** Derivând (3.19), conform (3.15) obţinem

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t), \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Totodată $x(0) = e^{\mathbf{0}t}x_0 = Ix_0 = x_0$, ceea ce arată că $x(t) = e^{At}x_0$ este soluţie.

Unicitatea. Dacă $z(t)$ este o soluţie pentru p.c.i. (3.18) vom considera funcţia $y(t) = e^{-At}z(t)$. Conform (3.15) şi regulei de derivare a unui produs, rezultă

$$\dot{y}(t) = -Ae^{-At}z(t)+e^{-At}\dot{z}(t) = -Ae^{-At}z(t)+e^{-At}Az(t) = (-Ae^{-At}+e^{-At}A)z(t)$$

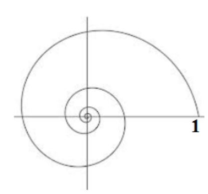
care, conform (3.16), este $\mathbf{0}z(t) = \mathbf{0}$; deci $y(t) \equiv const.$

Dar pentru $t = 0$, $y(t) = x_0$ deci $y(t) \equiv x_0$. Astfel încât revenind la definiţia lui $y(t)$ rezultă $x_0 \equiv e^{-At}z(t)$, adică $z(t) = e^{At}x_0 \equiv x(t)$.$\triangle$

Exemplu. $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) = 0, \;\; x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

R. Întrucât $e^{At} = e^{-2t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$, (vezi exemplul**???**) soluţia p.c.i. va fi $x(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$.

Observaţie. În coordonate polare ecuaţia ei este $\rho = e^{-2\theta}$ şi reprezintă grafic o spirală logaritmică (vezi figura).



3.1.3 Soluţia SDL neomogen cu coeficienţi constanţi.

Similar cazului ecuaţiilor diferenţiale liniare discutate în capitolul precedent, soluţia generală a unui SDL neomogen (3.3) se obţine adăugând soluţiei generale omogene corespunzătoare, o soluţie particulară neomogenă. În cazul sistemului cu coeficienţi constanţi, această soluţie poate fi determinată printr-o formulă. Aceasta se construieşte cu ajutorul matricei exponenţiale e^{At} şi a termenului liber $b(t)$ din (3.3), astfel

$$x_p(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau. \tag{3.20}$$

Verificăm că $x_p(t)$ este o soluţie (particulară) a sistemului neomogen (3.3). Pentru aceasta o introducem în el:

$$\dot{x}_p = Ae^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau + e^{At} e^{-At} b(t).$$

Am utilizat formula de derivare a produsului şi pe cea de derivare a integralei cu limită variabilă de integrare (i.e. primitiva integrandului). Deoarece matricele A şi $-A$ comută, din (3.17) rezultă $e^{At}e^{-At} = e^{0t} = I$, astfel încât relaţia devine

$$\dot{x}_p = Ae^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau + Ib(t) = Ax_p(t) + b(t)$$

şi verificarea este încheiată.
Prin adăugarea ei la soluţia generală omogenă, ce poate fi exprimată înlocuind în (3.19) vectorul condiţie iniţială x_0 cu un vector de constante şi dimensiune corespunzătoare $c \in \mathbb{R}^n$, obţinem soluţia generală neomogenă sub forma

$$x(t) = e^{At} c + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau. \tag{3.21}$$

Observaţie. Înlocuind în această formulă vectorul c cu vectorul-condiţie iniţială x_0, obţinem chiar soluţia particulară a p.c.i.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(0) = x_0.$$

Puteţi explica de ce?

Exemplu. Dacă sistemului liniar şi omogen din exemplul precedent îi adăugăm termenul liber $[1\ \ 1]^T$, noul SDL neomogen, astfel obţinut, va avea soluţia particulară

$$x_p(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \int_0^t e^{-2\tau} \begin{bmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

Făcând calculele găsim vectorul-coloană

$$x_p(t) = \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{5}(\cos t - 3\sin t),\ \ \frac{3}{5} - \frac{1}{5}(3\cos t + \sin t)\right]^T.$$

Adăugâd acest vector soluţiei generale omogene,

$$x(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + x_p(t).$$

am obţinut soluţia generală pentru SDL neomogen.

3.1.4 Metoda reducerii SDL la o EDL

O cale alternativă pentru determinarea soluţiei generale a unui SDL este cea a reducerii lui la o EDL liniare de acelaşi tip cu sistemul: omogen sau neomogen. Această reducere se realizează prin operaţii algebrice efectuate asupra operatorilor diferenţiali şi este asemănătoare metodei eliminării succesive aplicate sistemelor algebrice liniare.

Exemplul 1. Reluăm sistemul neomogen din exemplul precedent utilizând ca notaţie pentru derivata $\dfrac{d}{dt}$ notaţia D (conf. §2.1.1). Astfel cele două edl ale sistemului vor fi

$$\begin{cases} Dx_1 &= -2x_1 - x_2 + 1 \\ Dx_2 &= x_1 - 2x_2 + 1 \end{cases}.$$

Separăm apoi necunoscutele de termenii liberi utizând în continuare notaţia operatorială (vezi referinţa citată)

$$\begin{cases} (D+2)x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + (D+2)x_2 &= 1 \end{cases}.$$

Procedeul reducerii constă aici în a aplica primei ecuaţii operatorul $(D+2)$ scăzând-o apoi din a doua ecuaţie. Rezultă $-(D+2)^2x_1 - x_1 = -1$, ecuaţie echivalentă cu $(D^2+4D+5)x_1 = 1$. Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2+4\lambda+5 = 0$, iar rădăcinile ei sunt $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. În virtutea celor stabilite în §2.1.1 cazul III şi a tabelului din §2.1.2, soluţia generală corespunzătoare va fi

$$x_1 = C_1 e^{-2t} \cos t + C_2 e^{-2t} \sin t + \frac{1}{5}.$$

Înlocuind-o în prima ecuaţie (nu în a doua![5]) obţinem

$$x_2 = -(D+2)x_1 + 1 = \frac{3}{5} - C_1 e^{-2t} \cos t + C_2 e^{-2t} \sin t.$$

Observaţie. Rezultatul astfel obţinut coincide, în mod firesc, cu cel dedus prin metoda matriceală.

Exemplul 2. Sistemul diferenţial din §3.1.1, exemplul 2, se va scrie în notaţia operatorială astfel

$$\begin{cases} (D^2+5)y_1 & - & 2y_2 & = & 0 \\ -2y_1 & + & (D^2+2)y_2 & = & 0 \end{cases}.$$

Aplicând primei ecuaţii operatorul $\frac{1}{2}(D^2+2)$ şi adunând-o la ecuaţia a doua, obţinem

$$\frac{1}{2}(D^2+5)(D^2+2)y_1 - 2y_1 = 0 \Leftrightarrow (D^4+7D^2+6)y_1 = 0,$$

Rădăcinile ecuaţiei sale caracteristice $\lambda^4 + 7\lambda^2 + 6 = 0$ sunt $\lambda_{1,2} = \pm i$ şi $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{6}i$. Astfel încât soluţia generală corespunzătoare ei va fi

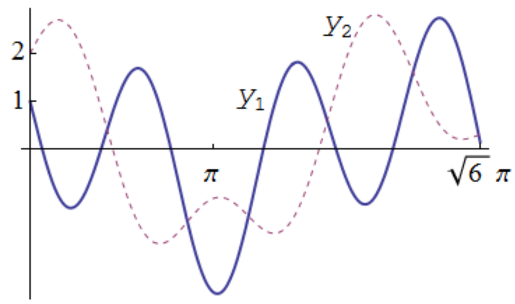
$$y_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 \cos \sqrt{6}t + C_4 \sin \sqrt{6}t.$$

Pentru a obţine funcţia necunoscută y_2 trebuie, aşa cum am explicat mai sus, să utilizăm prima ecuaţie, în care această funcţie apare nederivată

$$y_2 = \frac{1}{2}(D^2+5)y_1 = \frac{1}{2}y_1'' + \frac{5}{2}y_1 = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t - \frac{1}{2}C_3 \cos\sqrt{6}t - \frac{1}{2}C_4 \sin\sqrt{6}t.$$

[5] Dacă o introducem în a doua ecuaţie, obţinem o nouă edl (de ordinul I) în necunoscuta x_2. Ceea ce conduce, prin rezolvarea sa, la apariţia unei a treia constante arbitrare în soluţia sistemului. Faptul acesta contravine teoremei de unicitate a soluţiei p.c.i. Explicaţi de ce!

Impunând condiţiile (3.10) de mai sus, se obţine soluţia sistemului fizic cu două mase şi două resorturi din §3.1.1:
$y_1(t) = \cos t - 2\sin\sqrt{6}t$,
$y_2(t) = 2\cos t + \sin\sqrt{6}t$,
cu reprezentarea grafică alăturată.



Cap. 4

Metoda transformatei Laplace

4.1 Noţiuni introductive

În acest capitol vom dezvolta o metodă de rezolvare a problemelor cu condiţii iniţiale pentru ecuaţiile şi sistemele diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi mai eficientă si mai generală decât cele descrise în capitolul precedent. Ea se bazează pe o transformare integrală importantă şi care reprezintă un instrument principal de lucru în fizică, inginerie şi alte domenii cu caracter aplicativ. Începem prezentarea sa.

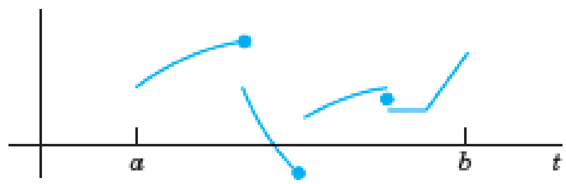
4.1.1 Transformata Laplace şi proprietăţile ei

Această transformată se aplică funcţiilor de variabilă reală şi valori reale $f(t),\ \ t \geq 0$ - funcţii care au următoarele două proprietăţi:

a) există $M, k \geq 0 : \forall t \geq 0,\ \ |f(t)| \leq Me^{kt}$.[1]

b) $f(t)$ este *continuă pe porţiuni.* Aceasta înseamnă că în fiecare interval *finit* $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ funcţia are *cel mult* un număr *finit* de puncte de discontinuitate, puncte în care limitele laterale există şi sunt finite. (În figura următoare este reprezentat graficul unei astfel de funcţie. S-au marcat prin buline valorile ei în punctele de salt).

[1] De exemplu funcţiile $e^{t^2}, 1/t, 1/(t-1)$ etc, nu au această proprietate.



Definiţia transformatei Laplace
Dacă funcţia $f(t)$, definită pentru orice $t \geq 0$, verifică cele două proprietăţi **a)** şi **b)**[2], notăm cu $F(s)$ sau $\mathcal{L}(f)$ integrala improprie cu parametru[3] următoare

$$F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{4.1}$$

Ea se numeţe *imaginea* prin $\mathcal{L}$ a funcţiei $f(t)$, iar aceasta nume **Exemplul 1.** Calculăm $\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} te^{-st} f(t)dt$.
Primitiva integrandului, determinată prin părţi, este: $-\frac{1}{s}\left(t + \frac{1}{s}\right)e^{-st}$ şi calculată între limitele $t \to \infty$ şi $t = 0$ are ca rezultat

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st} + \frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{s^2}$$

pentru orice $s > 0$.
Existenţa transformatei $\mathcal{L}(f)$
Funcţia $e^{-st}f(t)$ continuă pe porţiuni (condiţia **b**) este integrabilă pe orice interval finit al axei t. Dacă $s > k$, unde k este cel din condiţia **a**, atunci în baza acesteia

$$|\mathcal{L}[f]| = \left|\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^{\infty} e^{-st}|f(t|dt \leq \int_0^{\infty} Me^{kt}e^{-st}dt = \frac{M}{s-k},$$

ceea ce demonstrează convergenţa integralei improprii pentru s în intervalul menţionat.
Alte exemple. 2. $\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}$, pentru $s > 0$.

3. $\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt = \left[\frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a}$, pentru $s > a$.

---
[2] Caz în care i se mai spune $\mathcal{L}$ - transformabilă.
[3] Vezi cursul de Analiză matematică; aici parametrul este $s > a \geq 0$, unde a va fi precizat în cazul fiecărei funcţii.

Transformata Laplace inversă Dacă există transformata $F(s)$ pentru $s > k$, atunci aceasta este *unică* (pe intervalul dat) şi preimaginea sa $f(t)$ defineşte *transformata Laplace inversă*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \tag{4.2}$$

Liniaritatea transformatei Laplace

$\forall f(t), g(t)$ $\mathcal{L}-$ transformabile şi $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]. \tag{4.3}$$

Conform unei teoreme din Algebra liniară, dacă o aplicaţie liniară este inversabilă (i.e. injectivă) atunci inversa ei este liniară:[4]

$$\mathcal{L}^{-1}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}^{-1}[f(t)] + b\mathcal{L}^{-1}[g(t)]. \tag{4.4}$$

Aplicaţii

1. $\mathcal{L}[\cosh t] = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-a} + \dfrac{1}{s+a}\right) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$;

2. $\mathcal{L}[\sinh t] = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-a} - \dfrac{1}{s+a}\right) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$;

unde $s^2 - a^2 > 0$, deci $s > |a|$.

Următoarele două formule vor fi deduse utilizând exponenţiala complexă (vezi Cap.2 §2.1.1, cazul III): $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Din ea putem deduce şi $e^{-it} = \cos t - i \sin t$, pentru ca apoi, prin adunare şi scădere, să rezulte

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Astfel

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{it}] + \mathcal{L}[e^{-it}]\right), \qquad \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{it}] - \mathcal{L}[e^{-it}]\right). \tag{$*$}$$

Prin extinderea formulei din exemplul 3 anterior, obţinem

$$\mathcal{L}[e^{it}] = \frac{1}{s-i} \quad \text{şi} \quad \mathcal{L}[e^{-it}] = \frac{1}{s+i}$$

[4] Aici inversa $\mathcal{L}^{-1}$ este definită pe imaginea lui $\mathcal{L}$,

pe care înlocuindu-le în $(*)$ găsim

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) = \frac{s}{s^2 - i^2} = \frac{s}{s^2+1},$$

şi similar

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2 - i^2} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Într-o formă mai generală ele se prezintă astfel

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \text{ şi } \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$.

Deplasarea imaginii (s-deplasarea)

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a) \tag{4.5}$$

unde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ şi dacă $s > k$ reprezintă domeniul de existenţă pentru $F(s)$, atunci cel pentru $F(s-a)$ este $s > k + a$. Aplicând ambilor membri transformata $\mathcal{L}^{-1}$, formula poate fi scrisă

$$e^{at} f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]. \tag{4.6}$$

Demonstraţie. Înlocuim s cu $s-a$ în (4.1) şi obţinem

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}[e^{at} f(t)]dt = \mathcal{L}[e^{at} f(t)].\triangle$$

Transformata Laplace a derivatei

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \tag{4.7}$$

unde $f(t)$ este continuă în $[0,\infty)$, iar $f(t)$ şi $f'(t)$ sunt $\mathcal{L}$-transformabile. *Demonstraţie.* Dacă f' este continuă[5], integrând prin părţi obţinem

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_{t=0}^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

[5] Deşi demonstraţia o facem pentru acest caz, ea poate fi extinsă şi la cazul continuităţii pe porţiuni (condiţia **b**).

În baza primei proprietăţi a $\mathcal{L}$-transformabilităţii, rezultă că pentru $s > k$: $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-st}|f(t)| \leq M \lim\limits_{t\to\infty} e^{-(s-k)t} = 0$. Astfel, membrul drept al integrării prin părţi coincide cu membrul drept din formula (4.7). Dacă $f'(t)$ şi $f''(t)$ satisfac aceleaşi condiţii ca $f(t)$ şi $f'(t)$ din (4.7), atunci aplicând de două ori această formulă, găsim

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \tag{4.8}$$

Astfel, în ipoteze adecvate, se pot determina transformatele Laplace ale derivatelor funcţiei $f(t)$ de orice ordin.

Transformata Laplace a primitivei

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{4.9}$$

Demonstraţie. Deoarece $f(t)$ este continuă pe porţiuni (condiţia **b**), primitiva sa $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ este continuă. În plus

$$|g(t)| = \left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \leq \int_0^t |f(\tau)|d\tau \leq M\int_0^t e^{k\tau}d\tau = \frac{M}{k}(e^{kt}-1) \leq \frac{M}{k}e^{kt},$$

unde k şi M sunt constantele corespunzătoare din condiţia **a** pentru $f(t)$. Astfel încât funcţiei $g(t)$ i se poate aplica formula (4.7)

$$\mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s\mathcal{L}[g(t)]$$

Ceea ce conduce imediat la formula (4.9), deoarece $s > 0$

4.1.2 Rezolvarea problemei cu condiţii iniţiale

Transformata Laplace oferă cea mai directă şi simplă metodă de rezolvare a acestui tip de probleme pentru EDL şi SDL cu coeficienţi constanţi. Să urmărim pentru început cazul edl cu coeficienţi constanţi. Metoda parcurge trei etape:

I. $\mathcal{L}$-transformarea EDL într-o ecuaţie algebrică având drept necunoscută $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$.

II. Determinarea algebrică a necunoscutei $Y(s)$.

III. Revenirea, prin $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$, la soluţia căutată $y(t)$.

Exemplul 1. Se cere determinarea soluţiei edl $y'(t) - y(t) = e^t$ care satisface condiţia (iniţială) $y(0) = 1$.
R. *Etapa* I-*a*: $\mathcal{L}[y'(t) - y(t)] = \mathcal{L}[e^t] \Leftrightarrow \mathcal{L}[y'(t)] - \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[e^t]$.
Notăm $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$, apoi utilizând (4.7) şi exemplul 3 §2.1.1, obţinem

$$sY(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Etapa a II-*a*: din această ecuaţie extragem $Y(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2}$.
Etapa a III-*a*: descompunem rezultatul în fracţii simple
$Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{s-1}$ şi aplicăm, membru cu membru, $\mathcal{L}^{-1}$; obţinem $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1}\right]$. Pentru a determina $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)^2}\right]$ apelăm la formulele (4.5) şi (4.6) luând $a = 1$ şi $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$.
Întrucât $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$ (vezi exemplul 1 §2.1.1) va rezulta că $\mathcal{L}[e^t t] = \dfrac{1}{(s-1)^2}$ de unde $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)^2}\right] = e^t t$. Deoarece $\mathcal{L}[e^t] = \dfrac{1}{s-1}$, deci $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1}\right] = e^t$, soluţia problemei va fi $y(t) = e^t t + e^t$.

Exemplul 2. Se caută soluţia ecuaţiei $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos t$ care satisface condiţiile $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
R. *Etapa* I-*a*: Aplicând transformata $\mathcal{L}$ celor doi membri, obţinem, utilizând şi formula (4.8)

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Înlocuind apoi valorile condiţiilor iniţiale şi grupând termenii găsim

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s - 3 + \frac{s}{s^2+1}.$$

Etapa a II-*a*: extragem $Y(s) = \dfrac{s^3 - 3s^2 + 2s - 3}{(s^2 - 3s + 2)(s^2+1)}$.
Etapa a III-*a*: Descompunem rezultatul în fracţii simple

$$Y(s) = \frac{3}{2(s-1)} - \frac{3}{5(s-2)} + \frac{s}{10(s^2+1)} - \frac{3}{10(s^2+1)},$$

şi aplicăm, membru cu membru, $\mathcal{L}^{-1}$ utilizând tabelele anterioare; obţinem

$$y(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t.$$

Tabel de transformate Laplace uzuale.

	$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$	7	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	8	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
4	$t^n(n=0,1,2,\dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
5	$t^a(a>0)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Cazul condiţiilor iniţiale în $t_0 \neq 0$. Formulele (4.7) şi (4.8) - de calcul al transformatei Laplace pentru derivate - presupun condiţii iniţiale date în $t = 0$. Atunci când ele sunt date în $t_0 \neq 0$, se efectuează translaţia de variabilă $t = \tau + t_0$, prin care sunt readuse în origine .

Exemplul 3. Să se determine soluţia problemei cu condiţii iniţiale

$$y''(t) - y(t) = t, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

R. Punând $t = \tau + 1$ rezultă $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{d\tau}$ aşa încât dacă notăm $\widetilde{y}(\tau) = y(t)$, noua problemă va fi

$$\frac{d^2\widetilde{y}}{d\tau} - \widetilde{y} = \tau + 1, \quad \text{cu condiţiile} \quad \widetilde{y}(0) = 1, \frac{d\widetilde{y}}{d\tau}(0) = 0.$$

În prima etapă obţinem $(s^2-1)\widetilde{Y} = s + \dfrac{1}{s^2}$, iar din a doua etapă

$$\widetilde{Y} = \frac{s^3+1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2}.$$

Prin transformarea inversă: $\widetilde{y}(\tau) = e^\tau - \tau$ şi revenind la variabila t şi funcţia $y(t)$ obţinem

$$y(t) = e^{t-1} - (t-1).$$

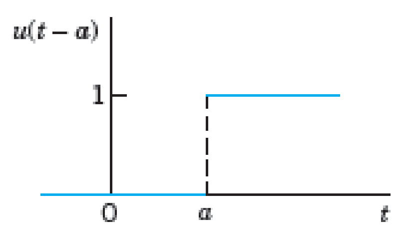
4.1.3 Funcţia "treapta unitate" a lui Heaviside

Transformata Laplace este nu numai un instrument avantajos de a rezolva probleme cu condiţii iniţiale, aşa cum am văzut deja, ci permite şi găsirea unor soluţii pentru acestea în cazuri în care metodele discutate în §2.1 nu pot opera. Mai precis este vorba despre acele edl neomogene al căror membru drept are discontinuităţi.[6] Astfel de funcţii modelează fenomene frecvent întâlnite în electricitate, mecanică, probabilităţi etc. Conceptele matematice prin care se realizează această modelare sunt "trepta unitate" $u(t-a)$ şi "impulsul Dirac" $\delta(t-a)$. Ne vom ocupa în continuare de primul dintre ele.

Treapta unitate sau funcţia lui Heaviside (după numele inginerului englez care a introdus-o şi utilizat-o) este definită astfel

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < a \\ 1 & \text{dacă} \quad t > a \end{cases} \quad \text{unde} \quad a \geq 0 \quad \text{fixat.} \tag{4.10}$$

Graficul său este,



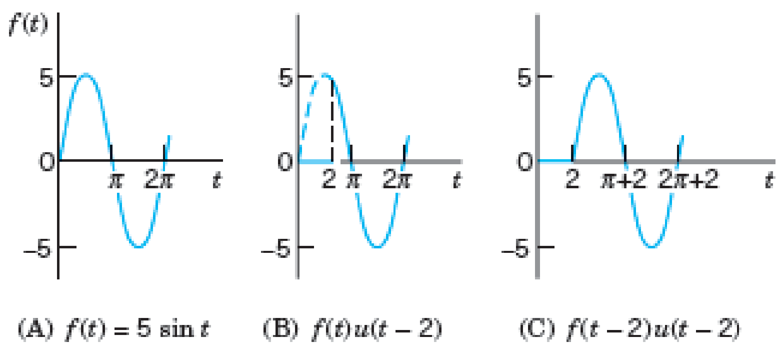
[6] Aici vom discuta cazul funcţiilor *continue pe porţiuni* (vezi proprietatea **b** din §4.1.1).

iar transformata Laplace

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}1dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=a}^\infty = \frac{e^{-as}}{s} \quad (4.11)$$

unde $a \geq 0, s > 0$.

Printre rolurile importante ale treptei Heaviside $u(t-a)$ se numără cele de a "aprinde", "stinge" sau "întârzia" intrarea în funcţiune a unor acţiuni reprezentate prin funcţii. Un exemplu îl constituie semnalul periodic reprezentat de funcţia $f(t) = 5\sin t$. Urmăriţi pe grafice consecinţele înmulţirii, pe rând, a lui $f(t)$ şi $f(t-2)$, cu $u(t-2)$.



În cazul (B) $f(t)$ rămâne "stinsă" până la momentul $t = 2$, când se aprinde; pe când în cazul (C) $f(t)$ se translatează cu $t = 2$ unităţi de timp.
Problemă. Trasaţi graficul funcţiei $f(t)u(2-t)$. Ce acţiune descrie acesta?

Deplasarea originalului (t-deplasarea)

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s) \quad (4.12)$$

şi aplicând ambilor termeni $\mathcal{L}^{-1}$:

$$f(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] \quad (4.13)$$

Demonstraţie. Întrucât $F(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$ rezultă $e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)d\tau$. Prin schimbarea de variabilă $\tau + a = t$ rezultă $d\tau = dt$ şi egalitatea devine

$$e^{-as}F(s) = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt.$$

Pentru a readuce limita inferioară de integrare la 0 apelăm la funcţia treaptă înmulţind integrandul cu $u(t-a)$. Obţinem astfel relaţia

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt.\triangle$$

Aplicaţie importantă. În probleme aplicative apar frecvent funţii definite pe cazuri (ramuri) şi ale căror transformate trebuie determinate. Metoda se bazează pe rescrierea lor drept sume de produse între funcţiile date, cu argument translatat, si combinaţii de funcţii - treaptă.

Exemplul 1. Să se determine $\mathcal{L}[f(t)]$ unde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dacă} \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos t & \text{dacă} \quad \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & \text{dacă} \quad t > \pi \end{cases}$$

Metoda I-a. Transformăm, mai întâi, definiţia pe ramuri a funcţiei $f(t)$ într-o sumă de funcţii definite pe intervalele disjuncte $(0, \pi/2), (\pi/2, \pi), (\pi, \infty)$:

$$f(t) = t\left[u(t) - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \cos t\left[u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - u(t-\pi)\right].$$

Pentru a putea aplica formula (4.12) trebuie ca această sumă să fie rescrisă, la rândul ei, numai din termeni de forma $f(t-a)u(t-a)$. Începem cu rescrierea primului termen $t\left[u(t) - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$ pe care mai întâi îl dezvoltăm şi apoi îl rescriem astfel:

$$tu(t) - tu\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = tu(t) - \left(t - \frac{\pi}{2}\right)u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}u\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Aplicând (4.12) pentru acest prim termen, găsim

$$\mathcal{L}\left[t\left(u(t) - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = \mathcal{L}[tu(t)] - \mathcal{L}\left[\left(t - \frac{\pi}{2}\right)u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{\pi}{2}\mathcal{L}\left[u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s/2}\frac{1}{s^2} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{-\pi s/2}}{s}\right).$$

Dezvoltăm al doilea termen

$$\cos t\left[u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - u(t-\pi)\right] = \cos t\, u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos t\, u(t-\pi) =$$

$= \cos\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(t-\pi+\pi)u(t-\pi) = -\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+$
$+\cos(t-\pi)u(t-\pi)$.
Aplicăm (4.12) şi obţinem

$$\mathcal{L}\left[\cos t\left(u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-u(t-\pi)\right)\right] = -\mathcal{L}\left[\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\mathcal{L}[\cos(t-\pi)u(t-\pi)] =$$
$$= -e^{-\pi s/2}\frac{1}{1+s^2}+e^{-\pi s}\frac{s}{1+s^2}.$$

În final găsim

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} - e^{-\frac{\pi s}{2}}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}+\frac{\pi/2}{s}\right)+e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Observaţie utilă. Pentru a evita trecerea de la termenii $f(t)u(t-a)$ la cei de forma $f(t-a)u(t-a)$, în general mai laborioasă, puteţi aplica direct transformata Laplace celor dintâi prin formula

$$\mathcal{L}\left[f(t)u(t-a)\right] = e^{-as}\mathcal{L}\left[f(t+a)\right]. \tag{4.14}$$

Metoda a II-a. Astfel, utilizând în exemplul precedent formula (4.14), obţinem pe rând
$\mathcal{L}\left[tu(t)\right] = \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$,
$\mathcal{L}\left[-tu(t-\frac{\pi}{2})\right] = -e^{-\pi s/2}\mathcal{L}\left[t+\frac{\pi}{2}\right] = -e^{-\pi s/2}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi/2}{s}\right)$,
$\mathcal{L}\left[\cos tu(t-\frac{\pi}{2})\right] = e^{-\pi s/2}\mathcal{L}\left[\cos tu(t+\frac{\pi}{2})\right] = e^{-\pi s/2}\mathcal{L}\left[-\sin t\right] = -\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+1}$,
$\mathcal{L}\left[-\cos tu(t-\pi)\right] = -e^{-\pi s}\mathcal{L}\left[\cos(t+\pi)\right] = e^{-\pi s}\mathcal{L}\left[\cos t\right] = e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$.
Adunând aceste patru transformate obţinem acelaşi rezultat ca mai sus.

Problema inversă. Dându-se transformata $F(s)$ a unei funcţii definită pe intervale, să se determine $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Exemplul 2. Să se determine

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\right].$$

R. Pentru a determina $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right]$ plecăm de la (4.13), care ne conduce la $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. Astfel $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+1)^2}\right]=e^{-t}t$ (vezi tabelul 1(2) şi (4.5)). Atunci, conf. (4.13), $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}}{(s+1)^2}\right]=e^{1-t}(t-1)u(t-1)$.

Similar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+\pi^2}\right]=\dfrac{1}{\pi}\sin\pi t$ (Tabel 2(7)). Deci conf. (4.13) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\right]=\dfrac{1}{\pi}\sin\pi(t-2)\,u(t-2)$ şi în concluzie

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\right]=e^{1-t}(t-1)u(t-1)+\frac{1}{\pi}\sin\pi(t-2)\,u(t-2).$$

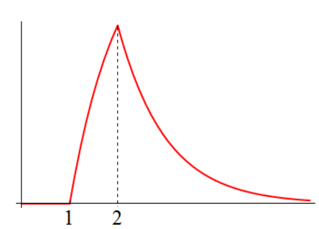
4.1.4 EDL cu membru drept-funcţie cu salt

În multe probleme aplicative ce conduc la edl neomogene, membrul drept reprezină o funcţie având discontinuităţi de speţa I-a (i.e. cu limite laterale finite). Ea se poate reprezenta cu ajutorul treptei unitate, iar transformata Laplace constituie metoda adecvată de a obţine în acest caz soluţia unei probleme cu condiţii iniţiale.

Exemplul 1. Soluţia problemei $y'(t)+y(t)=u(t-1)-u(t-2),\ y(0)=0$.
R. Aplicăm $\mathcal{L}$ şi obţinem $sY(s)-y(0)+Y(s)=\dfrac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s})$. Înlocuim $y(0)=0$ şi extragem $Y(s)=\dfrac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s+1)}$. Deoarece $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}\right)\right]=(1-e^{1-t})\,u(t-1)$ şi $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}\right)\right]=(1-e^{2-t})\,u(t-2)$

(exemplul 2, §4.1.3) obţinem soluţia de tip "dinte de fierăstrău"

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{dacă } 0<t<1\\ 1-e^{1-t} & \text{dacă } 1\le t<2\\ e^{2-t}-e^{1-t} & \text{dacă } t\ge 2\end{cases}$$



Functia Delta (impuls unitar)

Se notează $\delta(t)$ şi fără fi propriu-zis o funcţie[7], ea joacă un rol important în modelarea unor fenomene bruşte, de pildă "lovitura de ciocan". Proprietăţile ei se exprimă frecvent prin intermediul unor integrale improprii. Iată două dintre ele:

$$\textbf{1.} \quad \int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1, \tag{4.15}$$

şi pentru orice funcţie $f(t)$ continuă pe $[0,\infty)$:

$$\textbf{2.} \quad \int_0^\infty f(t)\delta(t-a)dt = f(a). \tag{4.16}$$

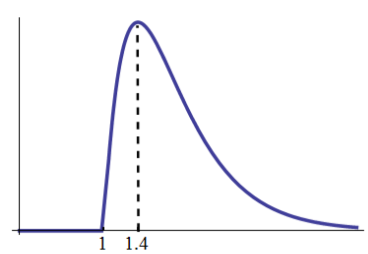
Înlocuind în (4.16) $f(t)$ cu e^{-ts} deducem $\mathcal{L}$ - transformata lui $\delta(t-a)$:

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right] = e^{-as}. \tag{4.17}$$

Exemplul 2. Vom studia efectul produs de o acţiune bruscă (ideal instantanee), modelată prin funcţia δ, asupra unui sistem masă-resort cu amortizor (vezi exemplul 4 §2.1.1) la momentul $t = 1$. Edl şi neomogenă a sistemului fizic este

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \delta(t-1),$$

iar condiţiile iniţiale : $y(0) = y'(0) = 0$, arată că sistemul s-a aflat la început în poziţia de repaus.



R. Aplicând $\mathcal{L}$: $s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = e^{-s}$,

de unde $Y(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2+5s+6} =$
$\dfrac{e^{-s}}{s+2} - \dfrac{e^{-s}}{s+3}$.

Astfel $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}}{s+3}\right] =$

$e^{2-2t}u(t-1) - e^{3-3t}u(t-1)$.

[7] Ea reprezintă o funcţie generalizată sau *distribuţie*.

4.1.5 Transformata Laplace pentru SDL

Metoda transformatei Laplace se aplică sistemelor diferenţiale liniare exact la fel cum se aplică şi ecuaţiilor diferenţiale liniare.

Exemplul 1. Să se determine soluţia SDL

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -4y + \delta(t-\pi) \end{cases}$$

care verifică condiţii iniţiale $y(0) = 0,\ \ z(0) = 0.$
R. Aplicând $\mathcal{L}$ în ambele ecuaţii obţinem sistemul algebric

$$\begin{cases} sY = Z \\ sZ = -4Y + e^{-\pi s} \end{cases}$$

având soluţia $Y = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+4},\ \ Z = \dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+4}.$

Prin transformarea inversă obţinem soluţiile căutate.[8]

$$y(t) = \frac{\sin 2(t-\pi)}{2} u(t-\pi),\ \ z(t) = \frac{\cos 2(t-\pi)}{2} u(t-\pi).$$

Rezolvarea vectorială. Reluăm notaţia (3.3) a unui astfel de sistem în forma normală

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$$

şi a condiţiei iniţiale corespunzătoare $x(0)$ (vezi §3.1.1). Transformata Laplace a acestuia poate fi şi ea realizată vectorial astfel:

Cazul 2×2.

$$\mathcal{L}\left[\begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathcal{L}[x_1(t)] \\ \mathcal{L}[x_2(t)] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} sX_1(s) - x_1(0) \\ sX_2(s) - x_2(0) \end{array}\right] = sX(s) - x(0),$$

unde $X(s)$ este transformata Laplace a vectorului de funcţii $x(t)$. Introducându-l în sistemul algebric

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + B(s), \tag{4.18}$$

[8]Deoarece soluţiile sunt funcţii periodice cu perioada 2π, mişcarea este şi ea periodică. Reprezentând parametric în planul yOz curba $y = y(t), z = z(t)$ obţinem un cerc de rază $1/2$, iar punctul $(y(t), z(t))$ începe să se rotească pe acest cerc de la momentul $t = \pi$.

unde $B(s)$ reprezintă vectorul $\mathcal{L}[b(t)]$ al transformatelor Laplace ai termenilor liberi $b_j(t),\ j = 1,2$ din cele două ecuaţii ale sistemului diferenţial dat. Soluţia vectorială a sistemului (4.18) poate fi scrisă atunci astfel

$$X(s) = Z(s)(B(s) + x(0)) \text{ unde } Z(s) = (sI_2 - A)^{-1}. \tag{4.19}$$

Observaţie. Pentru ca matricea $Z(s)$ să existe trebuie ca $s \notin Spec(A)$. Explicaţi de ce.

Efectuând transformata inversă a vectorului $X(s)$ obţinem soluţia problemei cu condiţia iniţială considerată.

Exemplul 2.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicăm transformata $\mathcal{L}$ acestei ecuaţii vectoriale şi obţinem

$$sX(s) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X(s) + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Întrucât aici

$$sI_2 - A = \begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}, \quad (sI_2 - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-3)} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix},$$

rezultă că

$$X(s) = (sI_2 - A)^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{s^2(s-1)(s-3)} \begin{bmatrix} s-3 \\ 3-s \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2(s-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{iar} \quad x(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t + e^{3t} - 2t - 2 \\ e^{3t} - 3e^t + 2t + 2 \end{bmatrix}.$$

Tabel de transformate Laplace inverse

	$F(s)$	$f(t)$		$F(s)$	$f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1	13	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\sinh at/a$
2	$\frac{1}{s^2}$	t	14	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
3	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	15	$\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\sinh \omega t$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	16	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos \omega t$
5	$\frac{1}{s^{3/2}}$	$\frac{2}{\sqrt{t/\pi}}$	17	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1-\cos \omega t}{\omega^2}$
6	$\frac{1}{s^a}\ (a>0)$	$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	18	$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{\omega t-\sin \omega t}{\omega^3}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	19	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{\sin \omega t-\omega t\cos \omega t}{2\omega^3}$
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}	20	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{\sin \omega t}{2\omega}$
9	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$	21	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{\sin \omega t+\omega t\cos \omega t}{2\omega}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k};(k>0)$	$\frac{t^{k-1}e^{at}}{\Gamma(k)}$	22	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{2\sqrt{\pi t^3}}$
11	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\sin \omega t}{\omega}$	23	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	24	$e^{-k\sqrt{s}};(k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2/4t}$

Cap. 5

ANEXĂ

5.1 Algoritm de calcul al matricei e^{At}

.

Explicăm în cele ce urmează o metodă de calcul al exponenţialei oricărei matrice pătrate $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : e^{At}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Ea se bazează pe urmă torul

Rezultat. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ există funcţiile de t:

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$$

unic determinate, astfel încât pentru orice $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{At} = \alpha_{n-1} A^{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A t + \alpha_0 I_n. \tag{5.1}$$

În plus, considerând polinomul

$$r(\lambda) = \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0, \tag{5.2}$$

pentru fiecare valoare proprie $\lambda \in Spec(A)$ are loc relaţia

$$r(\lambda t) = e^{\lambda t}; \tag{5.3}$$

iar dacă multiplicitatea $m = m_\lambda > 1$, atunci au loc şi următoarele $m - 1$ relaţii

$$r'(\lambda t) = e^{\lambda t}, \dots, r^{m-1}(\lambda t) = e^{\lambda t}. \tag{5.4}$$

Deducem de aici un algoritm în trei paşi pentru a determina matricea exponenţială e^{At} pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Algoritm de construcţie a matricei e^{At}.[1]

Pasul 1. Se determină valorile proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ale matricei A şi multiplicităţile lor corespunzătoare: $m_1, \ldots, m_p$.

Pasul 2. Pentru fiecare $\lambda_j \in Spec(A)$ se construiesc:
- relaţia (5.3), iar
- dacă $m_j > 1$, atunci şi relaţiile (5.4) corespunzătoare.
Apoi se rezolvă sistemul liniar $n \times n$ asfel obţinut extrăgând valorile necunoscutelor $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Pasul 3. Se introduc aceste valori în relaţia (5.1) obţinându-se astfel matricea e^{At}.

Exemple.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Spec(A) = \{1\}, \ \ m = 2.$

Relaţiile (5.3) vor fi $\begin{cases} r(t) & = \alpha_1 t + \alpha_0 = e^t \\ r'(t) & = \alpha_1 = e^t \end{cases}$ din care extragem

$\alpha_0 = (1-t)e^t, \ \ \alpha_1 = e^t.$

Introducându-le în (5.1) obţinem

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I_2 = e^t \begin{bmatrix} t & 3t \\ 0 & t \end{bmatrix} + (1-t)e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 3te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Spec(A) = \{0, 1\}, \quad m_1 = 2, \ m_2 = 1.$

Din relaţiile $\begin{cases} r(0t) & = \alpha_2(0t)^2 + \alpha_1(0t) + \alpha_0 = e^{0t} = 1 \\ r'(0t) & = 2\alpha_2(0t) + \alpha_1 = e^{0t} = 1 \\ r(1t) & = \alpha_2(1t)^2 + \alpha_1(1t) + \alpha_0 = e^{1t} = e^t \end{cases}$

obţinem $\alpha_0 = 1, \ \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = \dfrac{e^t - t - 1}{t^2},$

[1] Pentru calculul manual, algoritmul este fezabil în cazul matricelor 2×2, iar pentru matricele 3×3 doar în cazul celor simple.

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 At + \alpha_0 I_3 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 t & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t & 0 & \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^t - 1 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Spec(A) = \{-i, i\}$ $(i = \sqrt{-1})$, $m_1 = m_2 = 1$.

Relaţiile (5.3) vor fi $\begin{cases} r(-it) & = \alpha_1(-it) + \alpha_0 = e^{-it} \\ r(it) & = \alpha_1 it + \alpha_0 = e^{it} \end{cases}$ din care extragem

$$\alpha_0 = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t, \quad \alpha_1 = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t}.$$

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I_2 = \frac{\sin t}{t} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

5.2 Exerciţii

Determinaţi soluţiile următoarelor probleme cu condiţii iniţiale: **a)** cu metodele descrise în §2.1, dacă se poate; **b)** cu metoda transformatei Laplace. Verificaţi, în cazul folosirii ambelor metode, coincidenţa rezultatelor obţinute.

1. $x' - 2x = 4,\ x(0) = 1.$ **2.** $x' + 2x = 10e^{3t},\ x(0) = 6.$

3. $x' - 4x = 2e^{2t} + e^{4t},\ x(0) = 0.$ **4.** $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}, x(0) = 5, x'(0) = 7.$

5. $x'' - 4x = 24\cos 2t,\ x(0) = 3, x'(0) = 4.$

6. $x'' + 5x' + 6x = 4t,\ x(0) = 0, x'(0) = 0.$

7. $x'' + x = \begin{cases} t & \text{dacă} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{dacă} \quad t > 1 \end{cases}, x(0) = x'(0) = 0.$

8. $x'' + x = \delta(t - 2\pi),\ x(0) = 10, x'(0) = 0.$

9. $x'' + 3x' - 4x = 6e^{2t-2},\ x(1) = 4, x'(1) = 5.$

10. $x_1' = 5x_1 + x_2,\ \ x_2' = x_1 + 5x_2,\ x_1(0) = 1, x_2(0) = -3.$

11. $x_1' + x_2 = 0,\ \ x_1 + x_2' = 2\cos t,\ \ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.$

12. $x_1' = x_2 + 1 - u(t-1),\ \ x_2' = -x_1 + 1 - u(t-1),\ \ x_1(0) = x_2(0) = 0.$